

Pierwszy tydzień

Zadania

○ Zadanie 1.1

Wykonać podane działania:

- a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$; b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$;
c) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$; d) $\frac{2 + 3i}{1 + i}$;
e) $z \cdot \bar{w}$, $\frac{z^2}{w}$, $\frac{z - w}{\bar{z} + \bar{w}}$, $\frac{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} w}{z + w}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$.

○ Zadanie 1.2

Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

- a) $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$; b) $(2 + yi) \cdot (x - 3i) = 7 - i$;
c) $\frac{1 + yi}{x - 2i} = 3i - 1$; d) $\frac{x + yi}{x - yi} = \frac{9 - 2i}{9 + 2i}$.

○ Zadanie 1.3

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

- a) $z^2 = 4\bar{z}$; b) $\frac{1 + i}{z} = \frac{2 - 3i}{\bar{z}}$; c) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
d) $(z + 2)^2 = (\bar{z} + 2)^2$; e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$; f*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$;
g) $(1 + i)z + 3(z - i) = 0$; h) $\frac{2 + i}{z - 1 + 4i} = \frac{1 - i}{2z + i}$.

○ Zadanie 1.4

Zbadać, dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbf{R}$ równanie $\bar{z} - i \operatorname{Im} z = a + bi$ ma rozwiązanie.

○ Zadanie 1.5

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

- a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; c) $\overline{z - i} = z - 1$;
d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; e) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$; f) $\operatorname{Im} \frac{1 + iz}{1 - iz} = 1$.

○ Zadanie 1.6

Niech $u = \frac{z + 4}{z - 2i}$, $v = \frac{z}{iz + 4}$, gdzie $z \in \mathbf{C}$. Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których:

- a) liczba u jest rzeczywista; b) liczba u jest czysto urojona;
c) liczba v jest rzeczywista; d) liczba v jest czysto urojona.

○ Zadanie 1.7

Punkty z_1, z_2, z_3 płaszczyzny zespolonej są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczyć położenie punktu przecięcia środkowych tego trójkąta.

Wskazówka. Wykorzystać fakt, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka.

○ Zadanie* 1.8

Uzasadnić, że pole trójkąta, którego jeden wierzchołek jest w początku układu, a pozostałe dwa są w punktach $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, wyraża się wzorem $\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2)|$.

Drugi tydzień

Zadania

○ Zadanie 2.1

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) $-\sqrt{3}i$; b) $6 - 8i$; c) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}i$; d) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; e) $\frac{1+3i}{3-4i}$.

○ Zadanie 2.2

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $|z - 3 + 4i| = 1$; b) $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = 1$; c) $2 \leq |iz - 5| < 3$;
d) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$; e) $\left|\frac{z+i}{z^2+1}\right| \geq 1$; f) $\sin(\pi|z + 2i|) > 0$;
g*) $3|z + i| \leq |z^2 + 1| < 5|z - i|$.

○ Zadanie 2.3

Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu liczby zespolonej obliczyć, dla jakich liczb zespolonych z spełniających warunek $|z| \leq 1$ wyrażenie $|2i - 3 - z|$ jest najmniejsze, największe.

○ Zadanie 2.4

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

a) $7 + 7i$; b) $\sqrt{3} - i$; c) $-5 + 5\sqrt{3}i$;
d) $\sin \alpha + i \cos \alpha$; e) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$; f) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$.

Uwaga. W ćwiczeniach d), e), f) kąt α spełnia nierówności $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

○ Zadanie 2.5

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$; c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$;
d) $\arg(z^6) = \pi$; e) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(-z) \leq \frac{\pi}{2}$; f*) $\arg(\bar{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$.

○ Zadanie 2.6

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

a) $(1 - i)^{12}$; b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$; c) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$;
d) $\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10}$; e) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$; f) $\left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)^{24}$.

○ Zadanie 2.7

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

a) $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$; b) $\cos 4x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;
c*) $\operatorname{tg} 6x$ przez funkcję $\operatorname{tg} x$; d*) $\operatorname{ctg} 5x$ przez funkcję $\operatorname{ctg} x$.

○ Zadanie 2.8

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$; b) $\operatorname{Re}(z^4) \geq 0$; c) $\operatorname{Im}(z^2) \geq \operatorname{Re}[\bar{z}^2]$; d) $\operatorname{Im}\frac{(1+i)z}{(1-i)\bar{z}} \geq 0$.

○ Zadanie* 2.9

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć:

- a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; b) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;
c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; d) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x$;
e) $1 + (1-i) + (1-i)^2 + \dots + (1-i)^n$;
f) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots + (-1)^n \binom{n}{2m}$, $m = E\left(\frac{n}{2}\right)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

○ Zadanie* 2.10

Uzasadnić, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ określona wzorem $f(t) = \frac{1+ti}{1-ti}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, przekształca prostą \mathbb{R} na okrąg bez punktu.

Trzeci tydzień

Zadania

○ Zadanie 3.1

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać podane równania:

- a) $z^7 = \bar{z}$; b) $\overline{(z^4)} = z^2 |z^2|$; c) $(\bar{z})^2 |z^2| = \frac{4}{z^2}$;
d) $|z|^3 = iz^3$; e) $z^6 = (\bar{z})^6$; f) $|z^8| = z^4$.

○ Zadanie 3.2

Stosując wzory Eulera wyrazić podane funkcje w postaci sum sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x :

- a) $\sin^3 x$; b) $\cos^2 x$; c) $\sin^5 x$; d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

○ Zadanie 3.3

Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

- a) $\sqrt{5-12i}$; b) $\sqrt{-11+60i}$; c) $\sqrt[3]{i}$; d) $\sqrt[4]{16}$.

○ Zadanie 3.4

Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

- a) $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$; b) $\sqrt[3]{-27i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{-64}$;
e) $\sqrt[5]{32i}$; f) $\sqrt[3]{-1+i}$; g*) $\sqrt[4]{i}$; h*) $\sqrt[3]{2+2i}$.

○ Zadanie 3.5

Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć ich pozostałe elementy:

- a) $\sqrt{(5-4i)^4}$; b) $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$; c) $\sqrt[3]{(2-i)^6}$; d) $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$.

○ Zadanie 3.6

Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt $z_1 = 4-i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, jeżeli jego środkiem jest:

- a) początek układu współrzędnych; b) punkt $u = 1$;
c) punkt $u = 3+i$; d) punkt $u = 7+\sqrt{2}i$.

○ Zadanie 3.7

Znaleźć rozwiązania podanych równań:

- a) $z^4 = (1-i)^4$; b) $(z-1)^6 = (i-z)^6$; c) $z^3 = (iz+1)^3$.

○ Zadanie 3.8

Punkty $z_1 = 1-3i$, $z_3 = -1+5i$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wyznaczyć położenia pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

Czwarty tydzień

Zadania

○ Zadanie 4.1

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

- a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $Q(x) = x^2 - x + 4$;
b) $W(z) = z^3 + 5z^2 - iz + 3$, $V(z) = (1 + i)z - 2$.

○ Zadanie 4.2

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;
b) $P(x) = x^{16} - 16$, $Q(x) = x^4 + 2$;
c) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.

○ Zadanie 4.3

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

- a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$; b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;
c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

○ Zadanie 4.4

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

- a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; b) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$;
c) $4x^3 + x - 1$; d) $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

○ Zadanie 4.5

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

- a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; b) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;
c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

○ Zadanie 4.6

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

- a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;
b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;
c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$;
d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$;
e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14$, $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

○ Zadanie 4.7

Nie wykonując dzielenia znaleźć reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, $Q(x) = x^2 - x - 2$;
b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, $Q(x) = x^2 + 2$;
c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, $Q(x) = x^3 + 1$;
d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;
e) $P(x) = x^5 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$;
f) $P(x) = x^6 + x - 50$, $Q(x) = x^3 + 8$.

○ **Zadanie* 4.8**

Liczby zespolone z , z^2 , z^3 są pierwiastkami wielomianu stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości liczby z .

Piąty tydzień

Zadania

○ **Zadanie 5.1**

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- a) liczby 0 , $1 - 5i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczby -1 , $-3 + i$ są pierwiastkami podwójnymi tego wielomianu;
- b) liczba $-4i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby 3 , -5 pierwiastkami potrójnymi tego wielomianu.

○ **Zadanie 5.2**

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- a) liczby 1 , -5 , $-\sqrt{2}$ oraz $1 - 3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;
- b) liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby $-i$ oraz 3 są pierwiastkami podwójnymi, a liczba $-4 + 3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

○ **Zadanie 5.3**

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

- a) $z^2 - 2iz - 10$; b) $z^4 + 5z^2 + 6$; c) $z^3 - 6z - 9$.

○ **Zadanie 5.4**

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

- a) $x^6 + 8$; b) $x^4 + 4$; c) $x^4 - x^2 + 1$; d) $4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9$.

○ **Zadanie 5.5**

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

- a) $\frac{z^5 - 3z^2 + z}{z^3 + 4z^2 + 1}$; b) $\frac{x^5 + 3}{x^5 + 4}$; c) $\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

○ **Zadanie 5.6**

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

- a) $\frac{z^3 + i}{z^2(z - 2i)^3}$; b) $\frac{z^2 + z + 5}{(z + 1)(z + i)^2[z - (1 + i)]^3}$; c) $\frac{iz + 7}{(z^4 - 4)^2}$.

○ **Zadanie 5.7**

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

- a) $\frac{x^2 + 2x - 7}{x^3(x - 1)(x + 5)^2}$; b) $\frac{x^3 - 8x - 4}{(x^2 + 4)(x^2 + x + 3)^3}$; c) $\frac{x^4 + x^3}{(x + 3)^2(x^2 - 4x + 5)^2}$.

○ **Zadanie 5.8**

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

- a) $\frac{z^2}{(z - 1)(z + 2)(z + 3)}$; b) $\frac{z}{(z^2 - 1)^2}$; c) $\frac{16i}{z^4 + 4}$; d) $\frac{z^2 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}$.

○ Zadanie 5.9

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwie rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

- a) $\frac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; b) $\frac{x^2}{x^4-1}$;
 c) $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; d) $\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}$.

○ Zadanie* 5.10

Niech punkty P_1, P_2, \dots, P_n , gdzie $n \geq 3$, będą wierzchołkami n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $R = 1$. Obliczyć:

- a) $|P_1P_2|^2 + |P_1P_3|^2 + |P_1P_4|^2 + \dots + |P_1P_n|^2$;
 b) $|P_1P_2| \cdot |P_1P_3| \cdot |P_1P_4| \cdot \dots \cdot |P_1P_n|$.

Szósty tydzień

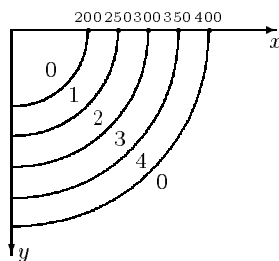
Zadania

○ Zadanie 6.1

- a) Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia figur w grze w szachy. W jaki sposób można by sprawdzić, czy dana macierz odzwierciedla pozycję możliwą do uzyskania w czasie gry?
 b) Zaproponować zapis, w postaci jednej macierzy, odległości drogowych i kolejowych w km między stolicami wszystkich województw w Polsce.
 c) Ekran monitora komputerowego jest złożony z 1024×768 punktów. Każdy punkt może świecić jednym z 20 kolorów. Kolorowe obrazy na ekranie można zapisywać w postaci macierzy złożonej z liczb całkowitych. Założyć, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu ekranu. Zapisać w formie macierzy przybliżony kształt ćwiartki kolorowej tęczy złożonej z pierścieni kołowych (rysunek).

Na rysunku:

- 0 – oznacza kolor biały,
 1 – oznacza kolor niebieski,
 2 – oznacza kolor zielony,
 3 – oznacza kolor żółty,
 4 – oznacza kolor czerwony.

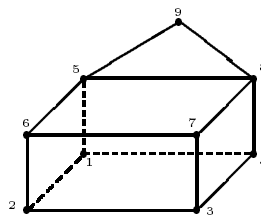
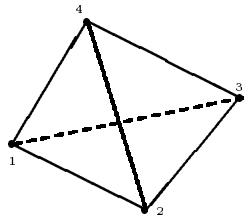
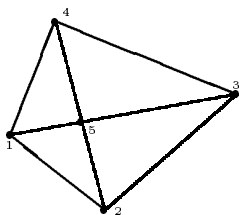


- d) Na rysunkach przedstawiono konstrukcje prętowe z ponumerowanymi węzłami:

1) płaski czworokąt z przekątnymi;

2) czworoscian;

3) konstrukcja przestrzenna



Zapisać w postaci macierzy schemat bezpośrednich połączeń między węzłami.

○ Zadanie 6.2

Obliczyć:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & 2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; & \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\
\text{c)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}; \\
\text{e)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; & \text{f)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

○ Zadanie 6.3

Rozwiązać podane równania macierzowe i układ równań macierzowych:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right); \\
\text{b)} \quad & 2Y \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\text{c)} \quad & \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{cases} & \text{d)} \quad & \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}
\end{aligned}$$

○ Zadanie 6.4

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n , gdzie $n \in \mathbf{N}$ i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & \text{b)} \quad & A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \\
\text{c)} \quad & A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbf{R}; & \text{d)} \quad & A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R}; \\
\text{e)} \quad & A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \text{f*)} \quad & A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a \in \mathbf{R}; \\
\text{g*)} \quad & A = [a_{ij}], \text{ gdzie } a_{ij} = 0 \text{ dla } i \geq j, i, j = 1, 2, \dots, k.
\end{aligned}$$

○ Zadanie 6.5

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające podane równania macierzowe:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; & \text{b)} \quad & X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \\
\text{c)} \quad & X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6 - 2i & -2 \end{bmatrix}; & \text{d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$f) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$g) X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$h) X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$i) X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, X \text{ jest tu macierzą stopnia } 2; \quad j) X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

○ Zadanie 6.6

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, gdzie A, B, C są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times m, m \times k, k \times l$;

b) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, gdzie A i B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

Uwaga. Mówimy, że macierze A i B są przemienne, gdy spełniają warunek $AB = BA$.

$$c^*) (A + I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A + \binom{n}{n} I,$$

gdzie A i I są macierzami kwadratowymi tych samych stopni, przy czym I jest macierzą jednostkową.

○ Zadanie* 6.7

Zbadać, czy istnieje macierz kwadratowa X stopnia n taka, że dla każdej macierzy kwadratowej A tego samego stopnia prawdziwa jest równość

$$XA = -A^T.$$

○ Zadanie* 6.8

Niech I^* oznacza macierz jednostkową stopnia n , w której zamieniono między sobą element stojący w k -tym wierszu i k -tej kolumnie z elementem stojącym w k -tym wierszu i w l -tej kolumnie oraz element stojący w l -tym wierszu i k -tej kolumnie z elementem stojącym w l -tym wierszu i l -tej kolumnie. Sprawdzić, co stanie się z macierzą kwadratową stopnia n , jeżeli pomnożymy ją z lewej lub prawej strony przez macierz I^* .

$$I^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & \dots & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k\text{-ta kolumna}} \quad \uparrow \hspace{10em} \uparrow \hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{l\text{-ta kolumna}}$

○ Zadanie* 6.9

Nadajnik emituje sygnał w postaci ciągu, którego elementami są litery S_1, S_2, S_3, S_4 . Po literze S_i może nastąpić tylko taka litera S_j , że $a_{ij} = 1$, gdzie

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Podać wszystkie dopuszczalne słowa 2-literowe.

b) Uzasadnić, że jeżeli w macierzy $[a_{ij}]^n = [c_{ij}]$ element $c_{ij} = 0$, to słowo n -literowe zaczynające się od S_i i kończące na S_j nie jest dopuszczalne. Jeżeli zaś $c_{ij} \neq 0$, to takie słowo jest możliwe, przy czym dla $c_{ij} = k$ jest dokładnie k takich słów.

- c) Wskazać najmniejszą liczbę n , dla której dopuszczalne jest słowo n -literowe o dowolnej literze początkowej i końcowej.
d) Ile jest różnych słów 2-, 3-, 4-literowych?

Siódmy tydzień

Zadania

○ Zadanie 7.1

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 7.2

Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} i & 1+i & 2 \\ 1-2i & 3 & -i \\ -4 & 1-i & 3+i \end{vmatrix}, \text{ trzecia kolumna}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \text{ drugi wiersz}.$$

○ Zadanie 7.3

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinać względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.4

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości (n oznacza stopień wyznacznika W_n):

$$\text{a) } W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1}-1}{3}; \quad \text{b) } W_{2n} = \begin{vmatrix} a & \dots & 0 & 0 & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & b & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n;$$

$$\text{c) } W_n = \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x},$$

gdzie $x \neq k\pi$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

○ Zadanie 7.5

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & 4x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

○ Zadanie 7.6

Korzystając z własności wyznaczników zamienić podany wyznacznik na sumę wyznaczników, których elementy są liczbami wymiernymi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}-\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3\sqrt{3}+2\sqrt{5} & \sqrt{3}+\sqrt{5} \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 7.7

Niech $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}$, gdzie $1 \leq i \leq 3$. Uzasadnić równość:

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.8

Obliczyć liczby inwersji oraz znaki podanych permutacji:

$$\text{a)} p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.9

Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a)} \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ósmy tydzień

Zadania

○ Zadanie 8.1

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 8.2

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geq 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{c*)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.3**

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; & \text{b)} \quad & \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & \text{c)} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \\ \text{d)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; & \text{e)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & \text{f)} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

○ **Zadanie* 8.4**

Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.5**

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbf{R}; \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.6**

Korzystając z metody bezwyznacznikowej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.7**

Rozwiązać podane równania macierzowe:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; & \text{b)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{c)} \quad & \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; & \text{d)} \quad & 3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X. \end{aligned}$$

○ **Zadanie 8.8**

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n , jeżeli:

$$\text{a)} \quad A^2 = 8A^{-1}; \quad \text{b)} \quad A^3 - A = \mathbf{0}; \quad \text{c)} \quad A^T = 4A^{-1}?$$

○ **Zadanie 8.9**

Macierze kwadratowe tego samego stopnia mają wyznaczniki równe 0. Jaką największą wartość może mieć wyznacznik sumy tych macierzy?

○ **Zadanie* 8.10**

Wyprowadzić wzory na podane wyznaczniki stopnia n :

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} ; \quad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ -a & b & a & \dots & a \\ -a & -a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & b \end{vmatrix} ; \\
\text{c)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \text{d)} \quad \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{vmatrix} ; \\
\text{e)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} ; \quad \text{f)} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

Dziewiąty tydzień

Zadania

○ Zadanie 9.1

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ podane układy równań są układami Cramera:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases} ; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases} ; \\
\text{c)} \quad & \begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases} ; \quad \text{d)} \quad \begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases} ?
\end{aligned}$$

○ Zadanie 9.2

Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązanie podanych układów równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases} ; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases} ; \quad \text{c)} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} .$$

○ Zadanie 9.3

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą y z podanych układów równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases} ; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases} ;$$

$$\text{c)} \quad x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0.$$

○ Zadanie 9.4

Rozwiązać podane układy równań stosując metodę macierzy odwrotnej:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases} ; & \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases} ; & \text{d)} \begin{cases} y + z + t = 4 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases} \end{array}$$

○ Zadanie 9.5

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} ; & \text{b)} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} ; & \text{d)} \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases} ; & \text{f)} \begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases} \end{array}$$

○ Zadanie 9.6

Stosując „metodę kolumn jednostkowych” rozwiązać podane układy Cramera:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases} ; & \text{b)} \begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + z + s = 0 \\ y + z + s + t = 4 \\ x + z + t = 0 \end{cases} ; & \text{d)} \begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6 \\ 3x - z + s + t = 3 \\ y + 4s + t = 1 \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8 \end{cases} \end{array}$$

○ Zadanie* 9.7

Rozwiązać podane układy równań przekształcając ich macierze rozszerzone (nie-wiadome zaznaczono nad kolumnami):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left[\begin{array}{cccccc|c} A & B & C & D & E & F & \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] ; & \text{b)} \left[\begin{array}{cccccccc|c} A & B & C & D & E & F & G & H & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

○ Zadanie* 9.8

Rozwiązać układy równań:

$$\text{a)} \begin{cases} 21,3x + 7,1y - 2,7z = 4,317 \\ 3,2x + 11,2y + 6,2z = 16,664 \\ -5,9x + 3,6y + 4,5z = 7,765 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 7,8x - 2,2y + 3,3z + 6,3t = 3,219 \\ -9,4x + 4,8y - 1,1z + 1,2t = -0,214 \\ 0,7x - 3,7y + 9,8z + 2,1t = 1,153 \\ 11,2x + 12,3y - 7,3z + 1,6t = 6,010 \end{cases}.$$

Dziesiąty tydzień

Zadania

○ Zadanie 10.1

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19 \end{cases}; & \quad b) \begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}; \\ c) \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}; & \quad d) \begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

○ Zadanie 10.2

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych”:

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} 3x + 2y + z - t = 0 \\ 5x - y + z + 2t = -4 \\ 7x + 8y + z - 7t = 6 \\ x - y + z + 2t = 4 \end{cases}; & \quad b) \begin{cases} 2x + 3y + z - 2s - t = 6 \\ 4x + 7y + 2z - 5s + t = 17 \\ 6x + 5y + 3z - 2s - 9t = 1 \\ 2x + 6y + z - 5s - 10t = 12 \end{cases}; \\ c) \begin{cases} 3x + y - 2t = 1 \\ 5x + 2y + 2z - t = 5 \\ x - y - 2t = -5 \\ 5x + y + z - 3t = 0 \\ -7x - 3y + z + 5t = -4 \\ 4x + y - 2z - 5t = -2 \end{cases}; & \quad d) \begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10 \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10 \\ -x + 3y + z + 2s = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

○ Zadanie 10.3

Dla jakich wartości parametru p podane układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie, określić liczby rozwiązań tych układów w pozostałych przypadkach:

$$a) \begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}.$$

○ Zadanie 10.4

Wykonanie pewnego pojemnika wymaga czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

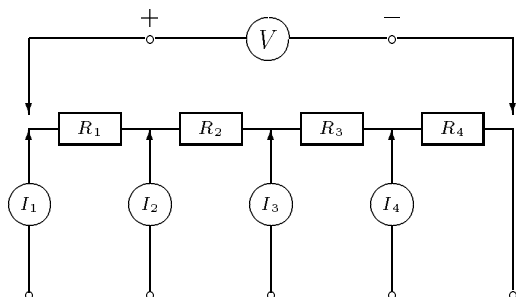
○ **Zadanie 10.5**

Rozwiązując odpowiedni układ równań znaleźć macierz A spełniającą oba podane warunki

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 10.6**

W układzie elektrycznym podanym na rysunku zamontowano oporniki R_1, R_2, R_3, R_4 .



Przy pięciu różnych warunkach zasilania odczytano z amperomierzy i woltomierza wartości prądów I_1, I_2, I_3, I_4 [mA] i napięć [V], co ilustruje tabelka.

	I_1	I_2	I_3	I_4	V
pomiar 1	2	5	4	1	33
pomiar 2	1	0	1	2	7
pomiar 3	5	-1	1	-1	20
pomiar 4	4	5	0	1	36
pomiar 5	0	1	-2	5	3

Wyznaczyć oporności R_1, R_2, R_3, R_4 .

○ **Zadanie* 10.7**

Rozwiązując odpowiednie układy równań Cramera znaleźć rozkłady na rzeczywiste ułamki proste podanych funkcji wymiernych:

a) $\frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2)^2}$; b) $\frac{x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 5}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2) (x^2 + 3)}$.

Jedenasty tydzień

Zadania

○ **Zadanie 11.1**

Obliczyć długości podanych wektorów:

a) $\vec{a} = (3, -4, 12)$; b) $\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2})$;

c) $\vec{c} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, h \in \mathbf{R}$;

d) $\vec{d} = (\varrho \cos \varphi \cos \psi, \varrho \sin \varphi \cos \psi, \varrho \sin \psi)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$.

○ **Zadanie 11.2**

Wektory \vec{a}, \vec{b} tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory \vec{a}, \vec{b} .

○ **Zadanie 11.3**

Znaleźć wersor \vec{u} , który:

a) leży w płaszczyźnie xOy i tworzy kąt α z dodatnią częścią osi Ox ;

- b) tworzy z dodatnimi częściami osi Ox , Oy , Oz odpowiednio kąty α , β , γ ;
 c) tworzy jednakowe kąty z wektorami $\vec{a} = (0, 3, -4)$, $\vec{b} = (8, 6, 0)$ i jest położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

○ **Zadanie 11.4**

Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

- a) $\vec{a} = (1, -2, 5)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$;
 b) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$;
 c*) $\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{y} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$, gdzie \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} są wersorami parami prostopadłymi.

○ **Zadanie 11.5**

Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary podanych kątów:

- a) między wektorami $\vec{a} = (-3, 0, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$;
 b) między dwusiecznymi kątów utworzonych przez osie Ox , Oy oraz osie Oy , Oz układu $Oxyz$;
 c) między przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, $\vec{w} = (3, 1, 5)$.

○ **Zadanie 11.6**

Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5})$ na wektor $\vec{b} = (-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5})$.

○ **Zadanie 11.7**

Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

- a) $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 5, -2)$; b) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;
 c*) $\vec{x} = 2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{y} = \vec{p} + 3\vec{q} + 4\vec{r}$, gdzie \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

○ **Zadanie 11.8**

Obliczyć pola podanych powierzchni:

- a) równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -2, 5)$;
 b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;
 c) czworościan rozpięty na wektorach \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

○ **Zadanie 11.9**

Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

○ **Zadanie* 11.10**

Dane są wartości trzech sił:

$$F_1 = |\vec{F}_1| = 3 \text{ N}, \quad F_2 = |\vec{F}_2| = 4 \text{ N}, \quad F_3 = |\vec{F}_3| = 5 \text{ N}.$$

Jaki powinny być skierowane w przestrzeni te siły, aby ich wypadkowa była wektorem zerowym?

Dwunasty tydzień

Zadania

○ **Zadanie 12.1**

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:

- a) $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$;
 b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

○ Zadanie 12.2

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

- a) równoległoscian rozpięty na wektorach $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (2, 5, -1)$;
- b) czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;
- c*) równoległoscian o przekątnych \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

○ Zadanie 12.3

Sprawdzić, czy

- a) wektory $\vec{a} = (-1, 3, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe;
- b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

○ Zadanie 12.4

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

- a) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (0, -3, 2)$;
- b) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;
- c) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz ;
- d) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$;
- e) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;
- f) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

○ Zadanie 12.5

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

- a) prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (2, -1, 3)$;
- b) prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;
- c) prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;
- d) prosta przechodzi punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła o wektorów $\vec{v}_1 = (2, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 0)$;
- e) prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}, \quad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3};$$

- f*) prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}.$$

○ Zadanie 12.6

Zbadać, czy

- a) punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R};$$

- b) prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 5y - 3z + 13 = 0$;
- c) punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do płaszczyzny $\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \mathbf{R}$;
- d) proste $l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-8}$, $l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny;
- e) prosta $l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 3 = 0$.

○ Zadanie 12.7

Znaleźć punkty przecięcia:

- a) prostych $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ y + z - 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0, \\ x + 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases}$
- b) prostej $l : \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ i płaszczyzny $\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \\ z = 3 + 2s + 4t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \mathbf{R}$;
- c) płaszczyzn $\pi_1 : 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3 : 3y + 2z = 0$.

○ Zadanie 12.8

Zbadać, czy punkty $P = (1, -2, 2)$ i $Q = (-2, 4, 3)$ leżą po tej samej stronie podanych płaszczyzn:

- a) $\pi : 2x + 3z - 7 = 0$; b) $\pi : x - 2y + 3z + 13 = 0$.

Trzynasty tydzień

Zadania

○ Zadanie 13.1

Obliczyć odległość:

- a) punktu $P = (1, -2, 3)$ od płaszczyzny $\pi : x + y - 3z + 5 = 0$;
- b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0$;
- c) płaszczyzn $\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;
- d) punktu $P = (0, 1, -1)$ od prostej $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$;
- e) prostych równoległych $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$, $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2}$;
- f) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x = 1, \\ z = 1; \end{cases}$
- g) prostych $l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$, $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$;
- h) prostej $l : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$, od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

○ **Zadanie 13.2**

Obliczyć miarę kąta między:

- a) prostą $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$;
b) płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$;
c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$, $l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 4 - t, \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$.

○ **Zadanie 13.3**

Znaleźć rzut prostokątny:

- a) punktu $P = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;
b) punktu $P = (-1, 2, 0)$ na prostą $l : x = y = z$;
c) prostej $l : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{0}$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0$.

○ **Zadanie 13.4**

Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:

- a) punktu $S = (1, -1, 2)$;
b) prostej $l : \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$
c) płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.

○ **Zadanie 13.5**

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (2, 3, -1)$:

- a) punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x - 2z + 8 = 0$;
b) prostej $l : x - 1 = y + 1 = z - 2$ na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

○ **Zadanie 13.6**

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

- a) $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$, $x + y + z = 5$;
b) $x - y = 1$, $x - y = 5$, $x + 2z = 0$, $x + 2z = 3$, $z = -1$, $z = 4$.

○ **Zadanie 13.7**

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 4t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 + 3s, \\ z = -4s, \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = -2p, \\ y = 3 - 3p, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{gdzie } t, s, p \in \mathbf{R}.$$

○ **Zadanie* 13.8**

Niech $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, 5)$. Na prostej $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$ znaleźć punkt C taki, że pole trójkąta ABC będzie najmniejsze.

○ **Zadanie* 13.9**

Dane są równania dwóch płaszczyzn

$$\pi_1 : 3x - 4y - 12z = 0, \quad \pi_2 : 4x + 12y + 3z - 13 = 0.$$

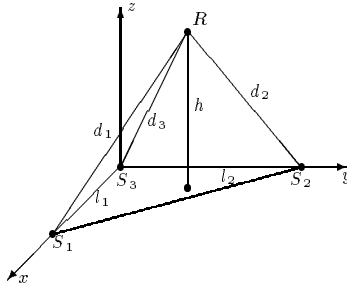
Znaleźć równania płaszczyzn, które są dwusiecznymi kątów dwuściennych utworzonych przez płaszczyzny π_1 i π_2 .

Czternasty tydzień

Zadania

○ Zadanie 14.1

Trzy stacje radiolokacyjne S_1, S_2, S_3 umieszczone są w wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $l_1 = 300$ km, $l_2 = 400$ km (rysunek). Pomiary odległości rakiety R od tych stacji dały następujące wyniki $d_1 = 300$ km, $d_2 = 400$ km, $d_3 = 400$ km. Obliczyć, na jakiej wysokości h leciała raketa.



○ Zadanie 14.2

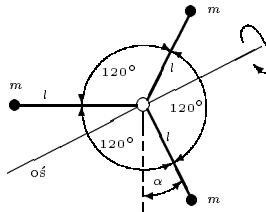
Cząsteczka porusza się po linii prostej ze stałą prędkością. W chwili $t_1 = 2$ cząsteczka znajdowała się w punkcie $P_1 = (0, -2, 5)$, a w chwili $t_2 = 3$ w punkcie $P_2 = (2, 3, 3)$. Znaleźć położenie P_0 tej cząsteczki w chwili $t_0 = 0$.

○ Zadanie 14.3

Na pochyłym płaskim terenie wytyczono kwadrat $A_1A_2A_3A_4$. Wzniesienia nad poziom morza punktów A_1, A_2, A_3 wynoszą odpowiednio $h_1 = 100$ m, $h_2 = 110$ m, $h_3 = 160$ m. Obliczyć wzniesienie h_4 punktu A_4 nad poziom morza.

○ Zadanie 14.4

Trzy punkty materialne o masie m przymocowane są do nieważkich ramion o długości l , które tworzą między sobą kąty 120° (rysunek). Układ ten osadzony jest na poziomej osi i może obracać się wokół niej. Uzasadnić, że układ ten pozostaje w równowadze, niezależnie od położenia początkowego.

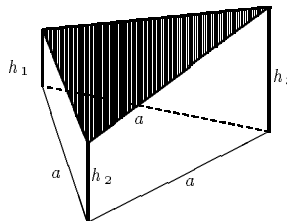


○ Zadanie 14.5

W celu określenia kąta nachylenia płaskiego nasypu do poziomu, wykonano pomiary kąta nachylenia tego nasypu w kierunku wschodnim i południowym. Pomiary te dały następujące wyniki: w kierunku wschodnim nasyp wznosi się pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a w kierunku południowym opada pod kątem $\beta = 45^\circ$. Obliczyć kąt nachylenia tego nasypu do poziomu.

○ Zadanie 14.6

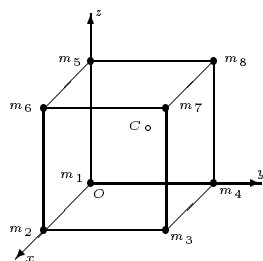
Siatka maskująca obiekt wojskowy zaczepiona jest na trzech masztach (rysunek). Maszty te mają wysokości $h_1 = 5$ m, $h_2 = 7$ m, $h_3 = 10$ m i ustawione są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 20$ m. Obliczyć pole siatki maskującej.



○ Zadanie 14.7

W wierzchołkach sześcianu o krawędzi $a = 10$ umieszczone są punkty materialne o masach odpowiednio: $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, m_4 = 4, m_5 = 5, m_6 = 6, m_7 = 7, m_8 = 8$ (rysunek).

- Określić położenie środka masy tego układu;
- Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi Oz ;
- Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi łączącej masy m_3 i m_7 ;



- Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy m_8 przez układ pozostałych siedmiu mas.

○ Zadanie 14.8

Nad Wrocławiem przebiegają dwa prostoliniowe korytarze powietrzne dla samolotów. Pierwszy z nich przebiega poziomo na wysokości $h_1 = 1000$ m ze wschodu na zachód. Natomiast drugi przebiega z południowego-wschodu na północny-zachód i wznosi się pod kątem $\alpha = 10^\circ$. Samoloty poruszające się tym korytarzem przeleatują nad Wrocławiem na wysokości $h_2 = 3000$ m. Obliczyć najmniejszą możliwą odległość między samolotami lecącymi tymi korytarzami.